On meromorphic and circumferentially mean univalent functions(Abstract_要旨)

AUTHOR(S):

Abe, Hitoshi

【 31 】

氏名	安倍 齊（あべ ひとし）
学位の種類	理学博士
学位記番号	論理博第145号
学位授与の日付	昭和41年6月21日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**On meromorphic and circumferentially mean univalent functions**（有理型円周的平均単葉函数について）
論文調査委員	（主査）教授 小堀 憲　教授 小松醇郎　教授 溝畑 茂

論文内容の要旨

ドイツの L. Bieberbach が1922年に，正則函数の零点の分布に関する研究，すなわち函数 $f(z)$ が単位円 $K(0;1)=\{z \mid |z|<1\}$ で正則であるとき，方程式 $f(z)=0$ の根の分布に関する研究を始めたのがきっかけとなって，a を一般の複素数としたときの方程式 $f(z)=a$ の根を研究することが問題となり，さらに，$f(z)=a$ の根の個数が p を越さない場合，というふうに，根の個数を制限した場合に，函数 $f(z)$ に，どのような特徴が現われるか，という問題が生じ，これが p 葉函数へと発展したのである。

ポーランドの M. Biernacki は，方程式

$$f(z)-Re^{i\varphi}=0,\quad (R>0),$$

の根の個数を $n(R,\varphi)$ と表わした。この個数を R の函数として研究するのではなくて，それの平均値 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n\ (R,\varphi)\,d\varphi$ を研究した。そして，特に

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(R,\varphi)\,d\varphi \leqq p$$

の場合に，興味ある結果を得た。そして Biernacki は，この場合には「円周的平均 p 葉」であると名づけた。したがって，$p=1$ の場合が「円周的平均単葉」なのである。

主論文においては，主として，この「円周的平均単葉函数」が対象となっているが，さらに，この結果を，特殊な形の「円周的平均 p 葉函数」へ広げることができることを示している。

単位円 $K(0;1)$ において，展開の形が

$$\frac{1}{z}+a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$$

で与えられる函数族に対しては，これの函数が円周的平均単葉である場合に，単位円 $K(0;1)$ のこの函数族に属する函数 $w=f(z)$ による像としてできる領域に属さない点を w_c とすれば

$$\max|w_c|-\min|w_c|\leqq 4$$

がなりたつことを証明している。そして，これから直接に導き出される結果を，いくつか示しているが，

そのなかには，L. Bieberbach や P. Montel などが異なる方法で導き出したものも含まれている。

さらに，申請者は，この方法を，単位円 $K(0\,;1)$ で有理型ではあるが，原点における展開の形が

$$z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$$

である函数族へ利用して，興味ある結果を得ている。この函数族に属する函数の1つを $f(z)$ とし，これの $K(0\,;1)$ にある極を z_∞ で示すと

$$\max|w_c|-\min|w_c|\leqq\frac{4}{1-|z_\infty|^2}$$

であることを示し，「$f(z)$ の値域は，円板 $\{w||w|<\delta\}$ または $\{w||w|>\delta^{-1}\}$ を蔽う」ことを示している。この δ というのは

$$\delta=\frac{-2}{1-|z_\infty|^2}+\sqrt{\frac{4}{(1-|z_\infty|^2)^2}+1}$$

のことである。

さらに，申請者は，この結果を，単位円 $K(0\,;1)$ で有理型であって，原点における展開が

$$z^p+a_{p+1}z^{p+1}+a_{p+2}z^{p+2}+a_{p+3}z^{p+3}+\cdots\cdots$$

で与えられる函数族にあてはめて，

i) この函数族に属する函数の値域は円板

$|w|<\dfrac{|z_\infty|^p}{(1+|z_\infty|)^{2p}}$ を p 回蔽うている。

ii) $|a_{p+1}|\leqq p\left(|z_\infty|+\dfrac{1}{|z_\infty|}\right)$

という2つの結果を得ている。さらに，この函数族に属する函数 $f(z)$ に対する $|f(z)|$ の評価を与えている。この評価は，精密という点からみると，見劣りがするけれども，方法が初等的であるのに，結果が良いので，魅力がある。

参考論文は，主として純粋な p 葉函数を対象とし，函数が定義されている領域を，複連結のものとしている。この種の研究は，現在進行中のものであるが，$|f(z)|$, $|f'(z)|$ の評価が与えられていて，興味深いものがある。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

単位円 $K(0\,;1)$ において有理型である函数の単葉生に関する研究と平行して，正則な函数の単葉性を，平均単葉性や円周的平均単葉性といった，ゆるい条件でおきかえて研究が進められてきたが，申請者は，両者を総合して，単位円 $K(0\,;1)$ で，有理型で，しかも円周的平均単葉の場合を取り上げた。

この目的を達成するために樹立した主定理ともいうべき結果は

$$\max|w_c|-\min|w_c|\leqq 4$$

であるが，この結果そのものが，興味あるものであり，また有力なものであって，利用価値が高い。申請者も示しているように，直接の結果として，Bieberbach や Montel が異なる原理にもとづいて樹立したものを1つの原理で統一している。これの証明方法も，申請者の研究内容の広さと深さとを，よく示している。

この結論を得るために，申請者は，補助定理として，単位円 $K(0;1)$ の函数

$$f(z)=\frac{1}{z}+a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$$

による像領域 $D(f)$ の補集合 $C[D(f)]$ の超越直径 $\tau(f)$ と，$C[D(f)]$ を正の実軸に関する円対称化を行なったものの超越直径 $\tau^*(f)$ との間に，$\tau(f)\geqq\tau^*(f)$ がなりたつことを証明しているが，これは重要な結果である。これも応用範囲の広い結果であるが，申請者は，これから主定理を導き出したのであるから，「超越直径」という概念と，「円対称化」という概念とを，みごとに利用したものとして，方法論的にみて，高く評価されてよい。

導き出された諸定理も，正則函数の場合に証明された結果の有理型函数への拡張があり，また，ただの「単葉」という条件で導き出されたもの，あるいは「平均単葉」という条件で導き出されたものなどが，「円周的平均単葉函数」に対してもなりたつこと，あるいはこれだけにしかなりたたない結果などを導き出している。

また，有理型函数の場合に，古くから企てられていたけれども，成功することの少なかった，極と値域の範囲との関係についても，申請者の研究の手がのびている。新しい結果，それも精密なものを得ているが，その努力は賞讃されてよい。

なお，申請者は，研究に不便な環境にありながらも，刻苦勉励して，上に述べたような結果を得ている。このことは，称えられてよいと考える。

以上のことから，本論文は理学博士の学位論文として価値があるものと認める。